УДК 621.391

Е.Г. ЖИЛЯКОВ, д-р техн. наук, БелГУ (г. Белгород, Россия),
И.Г. ПОПОВ,
И.И. ЧИЖОВ

ОПТИМАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ КВАНТОВАТЕЛЯ ПО УРОВНЮ

В даній роботі викладено удосконалений підхід до синтезу квантователя за рівнем значень цифрових кодів. Основною відміною від відомих підходів є мінімізація кількості рівнів квантування при гарантованій похибці представлення даних. Додатково розглянуті питання застосування даного підходу при пакетній передачі даних.

In given article is stated advanced approach to syntheses of the quantizer under level of meanings of the digital codes. The main change from the known approach is a minimization of the slicing level number, under guaranteed inaccuracy of data presentation. In addition, considered questions of applicability given approach in packet data communication.

Постановка проблемы. Определение: квантователем по уровню значений некоторой последовательности X_i принято называть операцию замены ее другой последовательностью X_i^* согласно правилу:

– если выполняется неравенство

$$b_k \le x_i < b_{k+1}, \quad i = 0, 1, 2 \ldots, \tag{1}$$

то полагается

$$x_i^* = p_k, \quad k = 0, 1, \ldots, b_m, \tag{2}$$

где

$$b_0 \le x_i \le b_m; \tag{3}$$

– интервалы $D_k = [b_k, b_{k+1})$ разбивают область значений и, обычно удовлетворяют условию

$$p_k \in D_k \Rightarrow b_{k+1} \le p_k < b_k. \tag{4}$$

Здесь имеется в виду, что область значений x_i конечна.

Построение процедуры квантования заключается в выборе значений b_k и p_k, $k = 0, 1, \ldots, M$. Ясно, что при этом следует руководствоваться некоторыми принципами, которые соответствуют представлениям об оптимальности подхода.

Отметим, что операция квантования по уровню имеет широкое применение [1 – 8], в частности, в задачах сокращения избыточности данных, особенно при передаче по каналам связи.

Анализ литературы. В известном подходе [1, 6 – 8] к этой проблеме количество уровней квантования предполагается фиксированным, а в качестве критерия используется погрешность квантования

$$\varepsilon^2 = \sum_{k=1}^{M} \int_{b_k}^{b_{k+1}} (x - p_k)^2 \omega(x) dx, \qquad (5)$$

где $\omega(x)$ – функция плотности вероятностей (ФПВ). При этом естественно в качестве условия оптимальности использовать требование

$$\varepsilon^2 = \min_{p_x, b_x}, \quad 0 \le k \le M, \qquad (6)$$

то есть минимизация осуществляется за счет выбора границ интервалов в (1) и набора значений квантованной последовательности в (2). Здесь важно иметь в виду, что при таком подходе не гарантируется уровень погрешности представления исходных данных с помощью квантованных значений. Очевидно, что погрешность представления является важной характеристикой.

Цель работы. Целью данной работы является разработка метода синтеза квантователя на основе минимизации числа уровней квантования при гарантированной погрешности в смысле неравенства

$$\varepsilon^2 / E[x_i^2] \le \delta^2, \; E[x^2] = \int x^2 \omega(x) dx, \qquad (7)$$

где δ – допустимая величина.

Предлагаемое решение. Положим

$$\varphi_k = \int_{b_k}^{b_{k+1}} [x - p_k]^2 \omega(x) dx, \qquad (8)$$

так что (5) можно переписать в виде

$$\varepsilon^2 = \sum_{0}^{M} \varphi_k . \qquad (9)$$

Легко получить $\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_k} = 2\int \; [x - p_k]^2 \, dx$, так что при

$$p_k = \int_{b_k}^{b_{k+1}} x\omega(x) dx / z_k, \qquad (10)$$

$$z_k = \int_{b_k}^{b_{k+1}} \omega(x) dx, \qquad (11)$$

функционал (8) достигает минимума, который равен

$$\varphi_k^{\min} = \int_{b_k}^{b_{k+1}} [x - p_k]^2 \omega(x) dx = \int_{b_k}^{b_{k+1}} x^2 \omega(x) dx - z_k p_k^2 . \qquad (12)$$

Очевидно, что при этом из представления (9) можно получить соотношение, которое при фиксированных границах интервалов квантования

$$D_k = [b_k, b_{k+1}) \tag{13}$$

определяет минимум погрешности квантования

$$\varepsilon_{\min}^2 = \int_0^{b_{m+1}} x^2 \omega(x) dx - \sum_{k=0}^{M} z_k p_k^2 . \tag{14}$$

Необходимо предложить процедуру определения границ интервалов (13) в общем случае. Используя определения (5) и (12), представим (7) в виде

$$\sum_{k=0}^{M} \frac{S_k^2}{S^2} \frac{\varphi_k^{\min}}{S_k^2} \le \delta^2 , \tag{15}$$

где

$$S_k^2 = \int_{b_k}^{b_{k+1}} x^2 \omega(x) dx ; \quad S^2 = \int_0^{b_M} x^2 \omega(x) dx = E[x^2]. \tag{16}$$

Если теперь потребовать выполнения равенства

$$\gamma_k = \frac{\varphi_k^{\min}}{S_k^2} = \gamma = const , \tag{17}$$

то левая часть (15) с учетом определений (17) принимает вид

$$\sum_{k=0}^{M} \frac{S_k^2}{S^2} \gamma \frac{\varphi_k^{\min}}{S_k^2} = \gamma \frac{1}{S^2} \sum_{k=0}^{M} S_k^2 = \gamma . \tag{18}$$

Таким образом, наряду с (10) получаем условие для выбора границ интервалов квадратов

$$\int [x - p_k]^2 \omega(x) \le \gamma \int_{b_k}^{b_{k+1}} x^2 \omega(x) dx . \tag{19}$$

Это неравенство и определение (10) являются основными при выборе $b_k, k = 0,1,\ldots,M$. Ясно, что (19) можно преобразовать к более удобному для вычислений виду

$$z_k p_k^2 \le (1-\gamma) S_k^2 , \tag{20}$$

где S_k^2 определена в (16).

Очевидно, что если левая граница *k*-го интервала известна, то вычисление правой сводятся к определению согласно (10) и (16) значений p_k и S_k^2, где b_{k+1} должен быть выбран наибольшим, из удовлетворяющих неравенству (20). Выше предполагалось, что нижняя граница области значений исходной последовательности b_0 известна. Поэтому описанная процедура синтеза квантователя может быть реализована.

Если $b_0 = 0$, то S_0^2 может быть слишком малым, так что

$$\gamma_0 = \frac{\varphi_0^{\min}}{S_0^2} \tag{21}$$

будет быстро расти и не позволит получить достаточно широкий интервал D_0. Такая же картина может наблюдаться и при других малых κ. Поэтому целесообразно использовать несколько иной, модифицированный, подход.

Положим

$$\gamma_0 = \int_0^{b_1} x^2 \omega(x) dx / S^2 , \tag{22}$$

так что

$$p_0 = 0 , \tag{23}$$

а неравенство (15) примет вид

$$\gamma_0(1-\gamma) + \gamma \le \delta^2 . \tag{24}$$

Отсюда получаем, что должно иметь место

$$\gamma_0 \le \frac{\delta^2 - \gamma}{1-\gamma} . \tag{25}$$

Возникает проблема вычисления на этой основе γ_0 и γ. Используя введенные ранее обозначения, неравенство (15) можно представить в виде

$$\frac{S_0^2}{S^2} + \sum_{k=1}^{M} \frac{\Phi_k}{S^2} \le \delta^2 . \tag{26}$$

Введя обозначение

$$\gamma_{ok} = \frac{\Phi_k}{S^2} , \tag{27}$$

получаем

$$\gamma_0 + \sum_{k=1}^{M} \gamma_{ok} \le \delta^2 . \tag{28}$$

Если наложить дополнительные требования

$$\gamma_{ok} \cong \gamma_0 , \tag{29}$$

то легко получить неравенство

$$\gamma_0 \le \frac{\delta^2}{(1+M)} . \tag{30}$$

Теперь уже можно использовать итерацию следующего вида. Сначала полагаем

$$\gamma_0 = a\delta^2,\ a \ll 1, \tag{31}$$

на основе чего решаем уравнение

$$\gamma = \delta^2[a(1-\gamma)], \tag{32}$$

получаемое с помощью неравенства (24).

Далее реализуется процедура квантования на основе неравенства вида (19), и определяется количество уровней квантования. После этого значения γ_0 и γ уточняются в соответствии с (30), где используется равенство и решение уравнения (32). Такие итерации продолжаются до тех пор, пока изменения параметров γ_0 и γ станут несущественными.

Выводы. Нами разработан подход к синтезу оптимального квантователя по уровню в предположении, что вероятности распределения значений квантуемой последовательности априори известны.

В процессе синтеза определяются значения уровней квантования и границы диапазонов разбиения области значений квантуемой последовательности в которых квантуемой величине присваивается одно и тоже значение.

Квантование будет оптимальным в том смысле, что минимизируется число уровней квантования при гарантированной среднеквадратичной погрешности представления исходных данных с помощью квантованных по уровню значений. В тех случаях, когда допустима пакетная обработка, например, при пакетной передаче по каналам связи, можно отказаться от условия априорного знания функции плотности вероятности. При этом можно использовать адаптацию к конкретным данным, вычисляя значения уровней квантования как средние значения исходных данных на интервалах разбиения, которые определяются одновременно с этим.

Список литературы: 1.*Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. – М.: Радио и связь, 1982. – 623 с. **2.** *Жиляков Е.Г.* О точности прогноза квантованного по уровню процесса авторегресии // Электрические цепи, сигналы, системы. Сб. науч. трудов. – К.: Наук. думка. – 1979. **3.** *Жиляков Е.Г.* Ошибки квантования по уровню при оценивании автокорреляционных функций гауссовых процессов // Проблемы передачи информации. – 1982. – № 3. **4.** *Жиляков Е.Г.* Влияние аналого-цифрового преобразования на точность оценивания автокорреляционной функции гауссового сигнала // Вестн. Харьк. политехн. ин-та "Исследование ионосферы методом некогерентного рассеяния". – Вып. 5. – 1987. – № 248. **5.** *Косякин А.А.* Статистическая теория квантования по уровню // Автоматика и телемеханика. – 1961. – № 6. **6.** *Саванов В.Л.* Влияние квантования на точность вычисления моментов случайных величин // Автоматика и телемеханика. – 1972. – № 10. **7.** *Баранов Л.А.* Квантование по уровню и временная дискретизация в цифровых системах управления. – М.: Энергоатомиздат, 1990. **8.** *Молчанов А.А., Шарадкин А.М.* Дискретизация информационных сигналов. – К.: Выща школа, 1991.

Поступила в редакцию 27.09.2004